

Übungsblatt 7

Kohomologie von Mannigfaltigkeiten

25. Kohomologie und Zusammenhangskomponenten.

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

- (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß die Relation “ $p \in M$ und $q \in M$ gehören zu einer zusammenhängenden Teilmenge von M ” eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation heißen Zusammenhangskomponenten.
- (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß die Zusammenhangskomponenten zusammenhängend und abgeschlossen in M sind.
- (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: Falls M m Zusammenhangskomponenten besitzt, dann ist $H^0(M) = \mathbb{R}^m$.

26. Integration entlang der Faser.

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ und $\rho : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die natürlichen Projektionen.

- (a) (2 Punkte) Es sei $\pi_* : \Omega_c^*(M \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega_c^{*-1}(M)$ die Integration entlang der Faser. Zeigen Sie, daß gilt: $d\pi_* = \pi_* d$.
- (b) (2 Punkte) Es sei $e_* : \Omega_c^{*-1}(M) \rightarrow \Omega_c^*(M \times \mathbb{R}^n)$, $\omega \mapsto \pi^*(\omega) \wedge \rho^*(e)$. Zeigen Sie, daß gilt: $de_* = e_* d$.

27. Kohomologie des Möbiusbandes.

(4 Punkte) Bestimmen Sie die Kohomologiegruppen $H^*(M)$ und $H_c^*(M)$ des offenen Möbiusbandes M .

28. Sphäre und Kugel.

(4 Punkte) Es sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, daß gilt: Es gibt keine Retraktion von der abgeschlossenen n -Kugel B^n im $\mathbb{R}^n$ auf die $n-1$ -Sphäre S^{n-1} , d.h.

es gibt keine stetige Abbildung $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$, deren Einschränkung auf S^{n-1} die Identität ist.

Abgabetermin: Freitag, 18. 6. 2010 um 10:00 Uhr.